Klausur - Mantelbogen

FERN-FACHHOCHSCHULE · FFH · HAMBURG

STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Name, Vorname	
Matrikel-Nr.	
Studienzentrum	
Studiengang	**Betriebswirtschaft**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Prüfungsleistung**
Klausur-Knz.	**BW-WMT-P12–020629**
Datum	**29.06.2002**

Ausgegebene Arbeitsblätter _______

Abgegebene Arbeitsblätter _______

Ort, Datum

Aufsichtsführende(r)

Ort, Datum

Prüfungskandidat(in)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
max. Punktezahl	14	16	14	14	7	12	23	100
erreichte Punktezahl								
2. Prüfer								

Gesamtpunktzahl	
Prüfungsnote	

Datum, 1. Prüfer

Datum, 2. Prüfer

Anmerkungen des Erstprüfers:

Datum, 1. Prüfer

Anmerkungen des Zweitprüfers:

Datum, 2. Prüfer

Klausur - Aufgaben

FFH · FERN-FACHHOCHSCHULE · HAMBURG

STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Studiengang	**Betriebswirtschaft**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Prüfungsleistung**
Klausur-Knz.	**BW-WMT-P12–020629**
Datum	**29.06.2002**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei numerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Hilfsmittel :
Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Anzahl Aufgaben: - 7 -
Höchstpunktzahl: - 100 -

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		Note	
von	bis einschl.		
95	100	1,0	sehr gut
90	94,5	1,3	sehr gut
85	89,5	1,7	gut
80	84,5	2,0	gut
75	79,5	2,3	gut
70	74,5	2,7	befriedigend
65	69,5	3,0	befriedigend
60	64,5	3,3	befriedigend
55	59,5	3,7	ausreichend
50	54,5	4,0	ausreichend
0	49,5	5,0	nicht ausreichend

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 insg. 14 Punkte

Herr Sternebeck hat sich mit seinem Sanitärgeschäft auf ein bestimmtes Produkt spezialisiert, von welchem er nach mehrjährigen Analysen die Kostenfunktion kennt:

$$K(x) = 0{,}4x^3 - 12x^2 + 74x + 8500 \ .$$

a) Berechnen Sie für die vorgegebene Kostenfunktion die Elastizitätsfunktion $e_{K,x}$. **9 Pkte**

b) Herr Sternebeck möchte seinen Output, ausgehend von 400 Einheiten, um 1 % erhöhen. **5 Pkte**

Mit welcher Kostensteigerung muss er rechnen?

Hinweis: Die Elastizitätsfunktion $e_{K,x}$ errechnet sich aus $e_{K,x} = \dfrac{K'(x)}{K(x)} \cdot x$.

Aufgabe 2 insg. 16 Punkte

Ein Betrieb produziert seinen Output x (in ME) für ein bestimmtes Produkt zu folgenden Gesamtkosten K (in GE):

$$K(x) = 150 \cdot \mathrm{e}^{0{,}04\,x} + 5200 \ .$$

Berechnen Sie:

a) die Höhe der Fixkosten. **4 Pkte**

b) die variablen Kosten für einen Output von 80 ME. **6 Pkte**

c) die Stückkosten bei einer Produktion von 25 ME. **6 Pkte**

Aufgabe 3 insg. 14 Punkte

Gegeben sei die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 2\sqrt{x} - 7x + 6x^2 + 20$ einer Unternehmung.

Berechnen Sie, welche zusätzlichen Kosten (in GE) im Unternehmen bei einer Steigerung des Outputs x von 16 auf 25 Einheiten anfallen?

Aufgabe 4 insg. 14 Punkte

Gegeben sind die reguläre Matrix $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

und deren inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & u & -3 \\ -1 & v & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die beiden Größen u und v der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Aufgabe 5 insg. 7 Punkte

Leiten Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 1)$ nach der Variablen x ab.

Aufgabe 6 insg. 12 Punkte

Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{2x \cdot \sqrt[5]{x^7}}{16\sqrt[2]{x^5}} \mathrm{d}x$.

Aufgabe 7 insg. 23 Punkte

Ein Unternehmen stellt beschichtete Bleche (Produkte I, II, und III) an zwei Fertigungsstellen A und B her.

Der folgenden Tabelle sind die Produktionsdauer und Stück-Deckungsbeiträge für jedes Produkt sowie die zeitlichen Kapazitäten der zwei Fertigungsstellen zu entnehmen:

	Produkte			**Kapazitäten** (in min.)
	I	**II**	**III**	
Fertigungsstelle A in (min/Stück)	2	6	5	4000
Fertigungsstelle B in (min/Stück)	3	4	4	6000
Deckungsbeitrag (GE/ME)	10	30	50	

Zwischen den Produkten I und II liegt eine Mengenabstufung derart vor, dass die Summe aus Menge von Produkt II und doppelter Menge von Produkt I maximal 600 betragen darf.

Aus Lagerhaltungsgründen darf die Produktion von Produkt III 200 Stück nicht überschreiten.

Ermitteln Sie:

a) die Zielfunktion. **2 Pkte**

b) die Restriktionsungleichungen. **4 Pkte**

c) die Nichtnegativitätsbedingungen. **1 Pkt**

d) das Ausgangstableau für den Simplexalgorithmus. **8 Pkte**

Das folgende Tableau zeigt die optimale Lösung des Problems:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	Z	b_i	q_i
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	-1	0	480	–
y_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{3}{2}$	0	3100	–
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$	0	60	–
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	200	–
Z	0	0	0	5	0	0	25	1	25000	–

Interpretieren Sie dieses Tableau, indem Sie:

e) die Basisvariablen mit ihren Werten angeben und deren Bedeutung erläutern. **5 Pkte**

f) die Nichtbasisvariablen mit ihren Werten angeben und deren Bedeutung erläutern. **3 Pkte**

FFH • FERN-FACHHOCHSCHULE HAMBURG
STAATLICH ANERKANNTE FACHHOCHSCHULE

Korrekturrichtlinie zur Prüfungsleistung
Wirtschaftsmathematik am 29.06.2002
Betriebswirtschaft
BW-WMT-P12 – 020629

Für die Bewertung und Abgabe der Prüfungsleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Note	
von	bis einschl.		
95	100	1,0	sehr gut
90	94,5	1,3	sehr gut
85	89,5	1,7	gut
80	84,5	2,0	gut
75	79,5	2,3	gut
70	74,5	2,7	befriedigend
65	69,5	3,0	befriedigend
60	64,5	3,3	befriedigend
55	59,5	3,7	ausreichend
50	54,5	4,0	ausreichend
0	49,5	5,0	nicht ausreichend

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

17. Juli 2002

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 vgl. SB 5, Kap. 4.5 insg. 14 Punkte

a) Elastizitätsfunktion: **9 Pkte**

Die Elastizitätsfunktion $e_{K,x}$ errechnet sich aus: $e_{K,x} = \frac{K'(x)}{K(x)} \cdot x$ (2 Pkte)

Mit den Funktionen

$K(x) = 0{,}4x^3 - 12x^2 + 74x + 8500$ (1 Pkt)

$K'(x) = 1{,}2x^2 - 24x + 74$ (2 Pkte)

ergibt sich $e_{K,x}$ zu:

$$e_{K,x} = \frac{1{,}2x^2 - 24x + 74}{0{,}4x^3 - 12x^2 + 74x + 8500} \cdot x = \underline{\underline{\frac{1{,}2x^3 - 24x^2 + 74x}{0{,}4x^3 - 12x^2 + 74x + 8500}}}\,.$$ (4 Pkte)

b) Kostensteigerung: **5 Pkte**

Einsetzen des Outputs von 400 Einheiten in die Elastizitätsfunktion ergibt:

$$e_{K,x} = \frac{1{,}2 \cdot 400^3 - 24 \cdot 400^2 + 74 \cdot 400}{0{,}4 \cdot 400^3 - 12 \cdot 400^2 + 74 \cdot 400 + 8500} = \frac{72{,}9896 \cdot 10^6}{23{,}7181 \cdot 10^6} = \underline{\underline{3{,}077}}\,.$$ (5 Pkte)

Herr Sternebeck muss mit einer Kostensteigerung von 3,077 % rechnen.

Lösung 2 vgl. SB 4, Kap. 5.1 insg. 16 Punkte

a) Fixkosten: **4 Pkte**

$K_f = K(0) = 150 \cdot e^0 + 5200 = \underline{\underline{5350 \text{ GE}}}$ (4 Pkte)

Die Fixkosten betragen 5350 GE.

b) Variable Kosten: **6 Pkte**

$K_v(x) = K(x) - K_f$ (1 Pkt)

$K_v(x) = 150 \cdot e^{0{,}04x} + 5200 - 5350$ (2 Pkte)

Mit $x = 80$ ergibt sich

$K_v(80) = 150 \cdot e^{0{,}04 \cdot 80} - 150 = \underline{\underline{3529{,}88 \text{ GE}}}\,.$ (3 Pkte)

Bei einem Output von 80 ME ergeben sich variable Kosten von 3529,88 GE.

c) Stückkosten: **6 Pkte**

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{150 \cdot e^{0{,}04x} + 5200}{x} = 150 \cdot \frac{e^{0{,}04x}}{x} + \frac{5200}{x}$$ (3 Pkte)

Mit $x = 25$ ergibt sich:

$$k(25) = 150 \cdot \frac{e^{0{,}04 \cdot 25}}{25} + \frac{5200}{25} = \underline{\underline{224{,}31 \ \text{GE}}}.$$ (3 Pkte)

Bei einer Produktion von 25 ME betragen die Stückkosten 224,31 GE.

Lösung 3 — vgl. SB 7, Kap. 3.1, 4.2 und 5.5 — insg. 14 Punkte

Die zusätzlichen Kosten erhält man durch die Lösung des bestimmten Integrals $\int_{x_1}^{x_2} K'(z)\,dz$. (2 Pkte)

Mit der Grenzkostenfunktion $K'(x) = 2\sqrt{x} - 7x + 6x^2 + 20$ und den Grenzen $x_1 = 16$ und $x_2 = 25$ erhält man

$$\int_{16}^{25} \left(2\sqrt{z} - 7z + 6z^2 + 20\right) dz = \left[2 \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2} z^2 + \frac{6}{3} z^3 + 20z\right]_{16}^{25}$$ (6 Pkte)

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot 25^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2} \cdot 25^2 + 2 \cdot 25^3 + 20 \cdot 25\right) - \left(\frac{4}{3} \cdot 16^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2} \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^3 + 20 \cdot 16\right)$$ (4 Pkte)

$$= 29.729{,}17 - 7.701{,}33$$

$$= \underline{\underline{22.027{,}84}}$$ (2 Pkte)

Es fallen zusätzliche Kosten in Höhe von 22.027,84 GE an.

Lösung 4 — vgl. SB 6, Kap. 2.7 — insg. 14 Punkte

Definition einer inversen Matrix: $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$, wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist. (2 Pkte)

Für $\boldsymbol{E}$ gilt: $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $e_{ii} = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ (hier $n = 3$).

Demnach genügt es, vom Gleichungssystem $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$ zwei Gleichungen für u und v zu betrachten. (2 Pkte)

Wählt man z. B. die Gleichungen zur Ermittlung von e_{12} und e_{22} so erhält man:

$e_{12} = 0 = 2(-4) + 2u + 3v$ (I) (3 Pkte)

$e_{22} = 1 = 1(-4) - 1u + 0v$ (II) (3 Pkte)

Aus (II) folgt: $\underline{\underline{u = -5}}$ (2 Pkte)

Einsetzen in (I) ergibt: $\underline{\underline{v = 6}}$ (2 Pkte)

Die gesuchten Größen sind $u = -5$ und $v = 6$.

Lösung 5 vgl. SB 5, Kap. 3.3 insg. 7 Punkte

Anwendung der Produktregel:

$g(x) = \mathrm{e}^x \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x$ (2 Pkte)

$h(x) = x^2 + 1 \qquad h'(x) = 2x$ (2 Pkte)

$f'(x) = \mathrm{e}^x\left(x^2 + 1\right) + \mathrm{e}^x \cdot 2x$ (2 Pkte)

$f'(x) = \mathrm{e}^x\left(x^2 + 2x + 1\right)$ (1 Pkt)

Lösung 6 vgl. SB 1, Kap. 2.3.7 und SB 7, Kap. 2 insg. 12 Punkte

$\int \frac{2x \cdot \sqrt[5]{x^7}}{16\sqrt[2]{x^5}}\,\mathrm{d}x \qquad = \int \frac{1}{8} x\, x^{\frac{7}{5}}\, x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$ (2 Pkte)

$= \frac{1}{8}\int x^{1+\frac{7}{5}-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$ (2 Pkte)

$= \frac{1}{8}\int x^{\frac{10+14-25}{10}}\,\mathrm{d}x$ (2 Pkte)

$= \frac{1}{8}\int x^{-\frac{1}{10}}\,\mathrm{d}x$ (2 Pkte)

$= \frac{1}{8}\,\frac{x^{-\frac{1}{10}+1}}{-\frac{1}{10}+1} + C$ (2 Pkte)

$= \frac{1}{8}\,\frac{x^{\frac{9}{10}}}{\frac{9}{10}} + C$

$= \frac{5}{36}\sqrt[10]{x^9} + C$ (2 Pkte)

Lösung 7 — vgl. SB 10, Kap. 2.2 — insg. 23 Punkte

x_1, x_2, und x_3 bezeichnen die produzierten Stückzahlen der Produkte I, II, und III.

Das lineare Optimierungsproblem läßt sich mathematisch wie folgt beschreiben:

a) Zielfunktion: **2 Pkte**

$$Z = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 \quad \Rightarrow \quad Max!$$

b) Restriktionsungleichungen: **4 Pkte**

Fertigungsstelle A	$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 4000$	(1 Pkt)
Fertigungsstelle B	$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 6000$	(1 Pkt)
Mengenabstufung	$2x_1 + x_2 \leq 600$	(1 Pkt)
Lagerhaltung	$x_3 \leq 200$	(1 Pkt)

c) Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$ **1 Pkt**

d) Ausgangstableau: **8 Pkte**

Nach dem Einführen von Schlupfvariablen erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllllll}
2x_1 + 6x_2 + 5x_3 & +y_1 & & & & & = 4000 \\
3x_1 + 4x_2 + 4x_3 & & +y_2 & & & & = 6000 \\
2x_1 + x_2 & & & +y_3 & & & = 600 \\
x_3 & & & & +y_4 & & = 200 \\
-10x_1 - 30x_2 - 50x_3 & & & & & +Z & = 0
\end{array}$$

(je Gleichung 1 Pkt, max. 5 Pkte)

(mit $y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$; $y_4 \geq 0$)

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich das Ausgangstableau wie folgt:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	Z	b_i	q_i
y_1	2	6	5	1	0	0	0	0	4000	
y_2	3	4	4	0	1	0	0	0	6000	
y_3	2	1	0	0	0	1	0	0	600	
y_4	0	0	1	0	0	0	1	0	200	
Z	−10	−30	−50	0	0	0	0	1	0	

(je Matrixzeile 0,5 Pkte, max. 3 Pkte)

e) Basisvariablen: **5 Pkte**

$x_1 = 60,\ x_2 = 480,\ x_3 = 200,\ y_2 = 3100,\ Z = 25000$ (2,5 Pkte)

x_1: Vom Produkt I werden 60 Stück produziert. (0,5 Pkte)

x_2: Vom Produkt II werden 480 Stück produziert. (0,5 Pkte)

x_3: Vom Produkt III werden 200 Stück produziert (0,5 Pkte)

y_2: An der Fertigungsstelle B bestehen freie Kapazitäten für 3100 Minuten. (0,5 Pkte)

Z: Der Deckungsbeitrag beläuft sich auf 25.000 GE. (0,5 Pkte)

f) Nichtbasisvariablen: **3 Pkte**

$y_1 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$ (1,5 Pkte)

y_1: An der Fertigungsstelle A bestehen keine freien Kapazitäten (0,5 Pkt)

y_3: Die Mengen der Produkte I und II sind voll erfüllt. (0,5 Pkt)

y_4: Die Lagerhaltung für Produkt III ist erschöpft. (0,5 Pkt)